Научно-техническая олимпиада «Старт в науку»
2024-2025 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 5.

Максимальное число баллов за олимпиаду по математике 15.

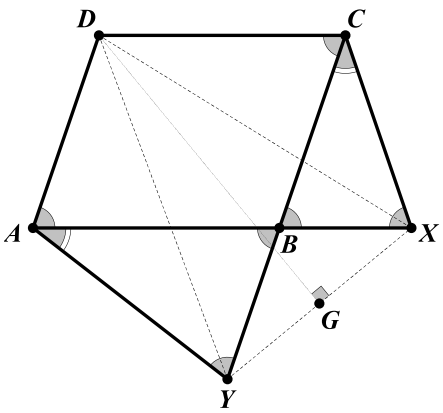
Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит **0 баллов**.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается **1 балл**.

M9.1-1 На лучах AB и CB, содержащих стороны параллелограмма $ABCD$ с тупым углом B, отмечены соответственно точки X и Y (отличные от B) так, что $CX = CB$ и $AY = AB$. Найдите расстояние от точки D до прямой XY, если $XY = 10$, а $\sin \angle DYX = \dfrac{3}{5}$.



Ответ. $\dfrac{15}{4}$.

Решение. Докажем, что треугольник DXY — равнобедренный. В самом деле, $\angle DCB = \angle DAB$, а $\angle XCB = 180^\circ - 2\angle CBX = 180^\circ - 2\angle ABY = \angle BAY$. Поскольку $DA = CB = CX$, а $AY = AB = CD$, треугольники ADY и CDX равны по двум сторонам и углу между ними. Остаётся найти высоту DG в треугольнике DXY: она равна $\dfrac{XY}{2} \cdot \operatorname{tg} \angle DYX = \dfrac{10}{2} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{4}$.

Комментарий. Доказано, что $DY = DX$ — 3 балла.

M9.2-1 Найдите площадь множества M, состоящего из точек с координатами (x, y), удовлетворяющими системе неравенств

$$\begin{cases} \big|y + |y|\big| \le \big|x - |x|\big|, \\ x^2 + y^2 \le 5. \end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{25}{8}\pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. При $y \le 0$ его левая часть равна нулю, а модуль любого числа неотрицателен, поэтому неравенство выполнено. При $y > 0$ неравенство принимает вид $2y \le \big|x - |x|\big|$. При $x \ge 0$ правая часть равна нулю, а левая положительна, и неравенство неверно. При $x < 0$ неравенство принимает вид

$$2y \le \big|x + |x|\big| = 2|x| = -2x,$$

то есть $y \le -x$. Поэтому первое неравенство задаёт всю полуплоскость $y \le 0$ и половину второй координатной четверти $x \le 0$, $y \ge 0$, $y \le -x$.

Второе неравенство системы задаёт круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{5}$. Множество M представляет собой сектор этого круга с углом раствора $\dfrac{5}{4}\pi$, поэтому его площадь равна $\dfrac{5}{8}\pi\sqrt{5}^2 = \dfrac{25}{8}\pi$.

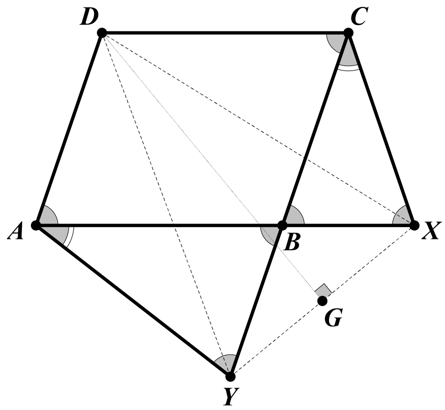
Комментарий. Верно изображено множество решений первого неравенства — не менее 3 баллов за задачу.

M9.3-1 Сколько четырёхзначных натуральных чисел имеют в своей записи ровно две различных цифры одинаковой чётности?

Ответ. 252.

Решение. Пусть используются две нечётных цифры. Их можно выбрать C_5^2 способами, а составить из них число $(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3)$ способами (выбирается количество мест, на котором стоит меньшая из этих цифр). Пусть теперь используются две чётные и отличные от нуля цифры. Для этого случая аналогичным образом получаем $C_4^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3)$ способа. Наконец, пусть число составлено из двух чётных цифр, одна из них равна нулю. Тогда вторую цифру можно выбрать C_4^1 способами, а составить из двух этих цифр число — $(C_3^1 + C_3^2 + C_3^3)$ способами (на первом месте не может стоять ноль). В итоге получаем, что таких чисел $C_5^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3) + C_4^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3) + C_4^1 \cdot (C_3^1 + C_3^2 + C_3^3) = 252$.

Комментарий. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из нечётных цифр — 2 балла. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из чётных цифр — 3 балла.



M9.1-2 На лучах AB и CB, содержащих стороны параллелограмма $ABCD$ с тупым углом B, отмечены соответственно точки X и Y (отличные от B) так, что $CX = CB$ и $AY = AB$. Найдите расстояние от точки D до прямой XY, если $XY = 20$, а $\sin\angle DYX = \frac{4}{5}$.

Ответ. $\frac{40}{3}$.

Решение. Докажем, что треугольник DXY — равнобедренный. В самом деле, $\angle DCB = \angle DAB$, а $\angle XCB = 180^\circ - 2\angle CBX = 180^\circ - 2\angle ABY = \angle BAY$. Поскольку $DA = CB = CX$, а $AY = AB = CD$, треугольники ADY и CDX равны по двум сторонам и углу между ними. Остаётся найти высоту DG в треугольнике DXY: она равна $\frac{XY}{2} \cdot \operatorname{tg}\angle DYX = \frac{20}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$.

Комментарий. Доказано, что $DY = DX$ — 3 балла.

M9.2-2 Найдите площадь множества M, состоящего из точек с координатами (x, y), удовлетворяющими системе неравенств

$$\begin{cases} \big|y + |y|\big| \geq \big|x + |x|\big|, \\ x^2 + y^2 \leq 7. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{35}{8}\pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. При $x \leq 0$ его правая часть равна нулю, а модуль любого числа неотрицателен, поэтому неравенство выполнено. При $x > 0$ неравенство принимает вид $\big|y + |y|\big| \geq 2x$. При $y \leq 0$ левая часть равна нулю, а правая положительна, и неравенство неверно. При $y > 0$ неравенство принимает вид

$$2x \leq \big|y + |y|\big| = 2|y| = 2y,$$

то есть $y \geq x$. Поэтому первое неравенство задаёт всю полуплоскость $x \leq 0$ и половину первой координатной четверти $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \geq x$.

Второе неравенство системы задаёт круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{7}$. Множество M представляет собой сектор этого круга с углом раствора $\frac{5}{4}\pi$, поэтому его площадь равна $\frac{5}{8}\pi\sqrt{7}^2 = \frac{35}{8}\pi$.

Комментарий. Верно изображено множество решений первого неравенства — не менее 3 баллов за задачу.

M9.3-2 Сколько пятизначных натуральных чисел имеют в своей записи ровно две различных цифры одинаковой чётности?

Ответ. 540.

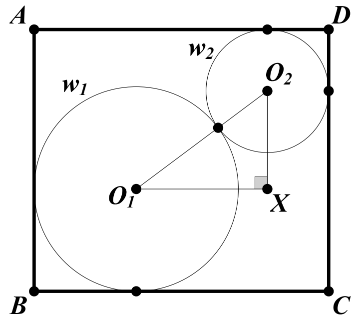
Решение. Пусть используются две нечётных цифры. Их можно выбрать C_5^2 способами, а составить из них число $(C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4)$ способами (выбирается количество мест, на котором стоит меньшая из этих цифр). Пусть теперь используются две чётные и отличные от

нуля цифры. Для этого случая аналогичным образом получаем $C_4^2 \cdot (C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4)$ способа. Наконец, пусть число составлено из двух чётных цифр, одна из них равна нулю. Тогда вторую цифру можно выбрать C_4^1 способами, а составить из двух этих цифр число — $(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4)$ способами (на первом месте не может стоять ноль). В итоге получаем, что таких чисел $C_5^2 \cdot (C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4) + C_4^2 \cdot (C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4) + C_4^1 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4) = 540$.
Комментарий. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из нечётных цифр — 2 балла. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из чётных цифр — 3 балла.

М10.1-3 Две окружности ω_1 и ω_2 расположены внутри прямоугольника $ABCD$, касаются внешним образом, причем ω_1 касается отрезков AB и BC, а ω_2 касается CD и DA. Какое наибольшее значение может принимать сумма радиусов окружностей ω_1 и ω_2, если стороны прямоугольника равны 25 и 18?

Ответ. 13.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, а X — точка пересечения прямых, проходящих через O_1 и O_2 параллельно BC и AB соответственно. Обозначим длину отрезка O_1O_2, равную искомой сумме радиусов, через s. Заметим, что $O_1X = BC - s$, а $O_2X = AB = s$, откуда с помощью теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2X получаем уравнение $s^2 = (18-s)^2 + (25-s)^2$. Корни этого уравнения $s = 13$ и $s = 73$. Заметим, что больший корень не подходит, поскольку сумма радиусов окружностей не может превосходить стороны прямоугольника.



Комментарий. Составлено квадратное уравнение на искомую величину s — 3 балла.
Неверно сделан отбор корней (взят больший корень) — не более 3 баллов за задачу.

М10.2-3 Корни уравнения $x^3 - 100x^2 + cx + d = 0$ образуют геометрическую прогрессию, а сумма обратных величин к этим корням равна 10. Найдите модуль коэффициента d.

Ответ. $\left(\sqrt{10}\right)^3$

Решение. Пусть b, bq, bq^2 — корни уравнения. Тогда по теореме Виета $-b(1+q+q^2) = -100$, а $-b^3q^3 = d$. По условию

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{bq} + \frac{1}{bq^2} = \frac{1+q+q^2}{bq^2} = 10,$$

то есть $b^2q^2 = \dfrac{100}{10}$. Тогда $|d| = |b^3q^3| = \left(\sqrt{10}\right)^3$.

Комментарий.

М10.3-3 Число $\dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{2000}{2001!}$ представили в виде несократимой дроби $\dfrac{a}{b}$ (a и b — натуральные числа). Вычислите разность $2a - b$.

Ответ. -2.

Решение. Заметим, что для всякого натурального k имеет место равенство $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$. Тогда сумма $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ равна $\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$, а данная сумма есть

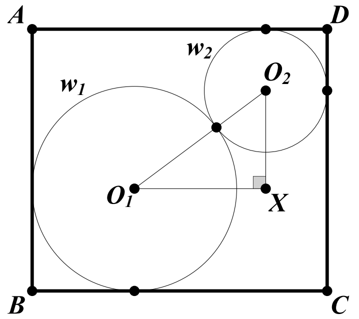
$$\sum_{k=2}^{2000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2!} + \sum_{k=1}^{2000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2} + \frac{2001!-1}{2001!} = \frac{2001!-2}{2\cdot 2001!} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2001! - 1}{2001!}.$$

Последняя дробь несократима: в самом деле, пусть $a = \frac{1}{2}\cdot 2001!$. Тогда эта дробь представляется выражением $\dfrac{a-1}{2a}$. Заметим, что в числителе стоит нечётное число, а в знаменателе чётное. Заметим также, что для всякого простого делителя знаменателя $p > 2$ числитель представляется в виде $k \cdot p - 1$ и поэтому на p не делится. Итак, полученное представление суммы $\displaystyle\sum_{k=2}^{2000} \frac{k}{(k+1)!}$ в виде дроби $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2001! - 1}{2001!}$ есть несократимая дробь. Значит, искомое значение $2a - b$ равно -2.

M10.1-4 Две окружности ω_1 и ω_2 расположены внутри прямоугольника $ABCD$, касаются внешним образом, причем ω_1 касается отрезков AB и BC, а ω_2 касается CD и DA. Какое наибольшее значение может принимать сумма радиусов окружностей ω_1 и ω_2, если стороны прямоугольника равны 32 и 25?

Ответ. 17.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, а X — точка пересечения прямых, проходящих через O_1 и O_2 параллельно BC и AB соответственно. Обозначим длину отрезка O_1O_2, равную искомой сумме радиусов, через s. Заметим, что $O_1X = BC - s$, а $O_2X = AB = s$, откуда с помощью теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2X получаем уравнение $s^2 = (32 - s)^2 + (25 - s)^2$. Корни этого уравнения $s = 17$ и $s = 97$. Заметим, что больший корень не подходит, поскольку сумма радиусов окружностей не может превосходить стороны прямоугольника.



Комментарий. Составлено квадратное уравнение на искомую величину s — 3 балла. Неверно сделан отбор корней (взят больший корень) — не более 3 баллов за задачу.

M10.2-4 Корни уравнения $x^3 - 20x^2 + cx + d = 0$ образуют геометрическую прогрессию, а сумма обратных величин к этим корням равна 5. Найдите модуль коэффициента d.

Ответ. 8

Решение. Пусть b, bq, bq^2 — корни уравнения. Тогда по теореме Виета $-b(1 + q + q^2) = -20$, а $-b^3q^3 = d$. По условию

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{bq} + \frac{1}{bq^2} = \frac{1 + q + q^2}{bq^2} = 2,$$

то есть $b^2q^2 = \dfrac{20}{5} = 4$. Тогда $|d| = |b^3q^3| = 8$.

Комментарий. С помощью теоремы Виета составлена система уравнений на неизвестные параметры (см. решение) — 2 балла.

M10.3-4 Число $\dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{3000}{3001!}$ представили в виде несократимой дроби $\dfrac{a}{b}$ (a и b — натуральные числа). Вычислите разность $2a - b$.

Ответ. -2.

Решение. Заметим, что для всякого натурального k имеет место равенство $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$. Тогда сумма $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ равна $\dfrac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$, а данная сумма есть

$$\sum_{k=2}^{3000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2!} + \sum_{k=1}^{3000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2} + \frac{3001! - 1}{3001!} = \frac{3001! - 2}{2 \cdot 3001!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3001! - 1}{3001!}.$$

Последняя дробь несократима: в самом деле, пусть $a = \frac{1}{2} \cdot 3001!$. Тогда эта дробь представляется выражением $\dfrac{a-1}{2a}$. Заметим, что в числителе стоит нечётное число, а в знаменателе чётное. Заметим также, что для всякого простого делителя знаменателя $p > 2$ числитель представляется в виде $k \cdot p - 1$ и поэтому на p не делится. Итак, полученное представление суммы $\displaystyle\sum_{k=2}^{3000} \frac{k}{(k+1)!}$

в виде дроби $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 3001! - 1}{3001!}$ есть несократимая дробь. Значит, искомое значение $2a - b$ равно -2.

Комментарий. Общее слагаемое $\dfrac{k}{(k+1)!}$ представлено в виде разности, указанной в решении — не менее 3 баллов за задачу.

М11.1-5 Найдите все пары вещественных чисел (x, y) таких, что

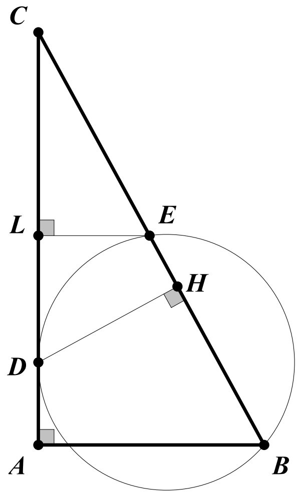
$$\begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Ответ. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{4} + \pi j$, $x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{4} - \pi j + 2\pi k$, где $k,\ j \in \mathbb{Z}$, а также $y = -\operatorname{arctg}\dfrac{5}{4} + \pi j$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{4} - \pi j + 2\pi k$, где $k,\ j \in \mathbb{Z}$.

Решение. Из первого уравнения получаем $x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим два случая: $l = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $l = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. В первом случае $\sin x = \cos y$, а во втором $\sin x = -\cos y$. Тогда из второго уравнения в первом случае получаем $y = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{4} + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$, а во втором, соответственно, $y = -\operatorname{arctg}\dfrac{5}{4} + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Комментарий. Верно решено только первое уравнение и других продвижений нет — 1 балл за задачу.
Ошибка при решении элементарного тригонометрического уравнения — 0 баллов за задачу.

М11.2-5 На катете AC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D, а на гипотенузе BC — точка E такие, что описанная окружность треугольника BDE касается AC. Расстояние от точки E до прямой AC равно 2, а $AB = 4$. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.



Ответ. $h = 2\sqrt{2}$.

Решение. Пусть H — основание перпендикуляра из точки D на прямую BC, L — проекция точки E на AC, а $DH = h$. Из подобия прямоугольных треугольников LCE и HCD получаем $\dfrac{h}{EL} = \dfrac{CD}{CE}$. Аналогично и $\dfrac{h}{AB} = \dfrac{CD}{CB}$. Значит, $\dfrac{h^2}{2 \cdot 4} = \dfrac{CD^2}{CE \cdot CB}$. Но последнее отношение равно единице в силу теоремы о квадрате касательной. Значит, $h^2 = 8$ и $h = 2\sqrt{2}$.

Комментарий. Ответ получен рассмотрением частного случая (например, когда центр окружности лежит на гипотенузе) — баллы не добавляются.

М11.3-5 В магазине продаётся n чашек и n блюдец (все $2n$ товаров различны), причем $n \geq 2025$. Число способов выбрать 5 чашек и 6 блюдец — полный квадрат. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ. 2171.

Решение. Указанное число способов равно $C_n^5 \cdot C_n^6 = (C_n^5)^2 \cdot \dfrac{n-5}{6}$, откуда $n - 5$ должно иметь вид $6t^2$ для некоторого натурального t. Поскольку $n \geq 2025$, число $t = \dfrac{n-5}{6}$ есть квадрат натурального числа, большего 18. Прямой проверкой убеждаемся, что $n = 6 \cdot 19^2 + 5 = 2171$ подходит.

Комментарий. Записано число способов выбрать данные объекты (через числа способов или через факториалы) — 1 балл за задачу.
Комбинаторная ошибка (двойной подсчёт, не все баллы учтены и т. п.) — 0 баллов за задачу.

M11.1-6 Найдите все пары вещественных чисел (x, y) таких, что

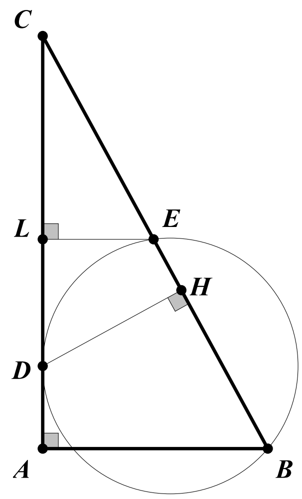
$$\begin{cases} \cos(x-y)=0, \\ \dfrac{\sin y}{\sin x}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi j$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\pi j+2\pi k$, где $k,\ j\in\mathbb{Z}$, а также $y=-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi j$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\pi j+2\pi k$, где $k,\ j\in\mathbb{Z}$.

Решение. Из первого уравнения получаем $x-y=\dfrac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. Рассмотрим два случая: $l=2k$, $k\in\mathbb{Z}$ и $l=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$. В первом случае $\sin x=\cos y$, а во втором $\sin x=-\cos y$. Тогда из второго уравнения в первом случае получаем $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi j$, $j\in\mathbb{Z}$, а во втором, соответственно, $y=-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi j$, $j\in\mathbb{Z}$.

Комментарий. Верно решено только первое уравнение и других продвижений нет — 1 балл за задачу.
Ошибка при решении элементарного тригонометрического уравнения — 0 баллов за задачу.

M11.2-6 На катете AC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D, а на гипотенузе BC — точка E такие, что описанная окружность треугольника BDE касается AC. Расстояние от точки E до прямой AC равно 2, а $AB=8$. Найдите расстояние от точки D до прямой BC.



Ответ. $h=4$.

Решение. Пусть H — основание перпендикуляра из точки D на прямую BC, L — проекция точки E на AC, а $DH=h$. Из подобия прямоугольных треугольников LCE и HCD получаем $\dfrac{h}{EL}=\dfrac{CD}{CE}$. Аналогично и $\dfrac{h}{AB}=\dfrac{CD}{CB}$. Значит, $\dfrac{h^2}{2\cdot 8}=\dfrac{CD^2}{CE\cdot CB}$. Но последнее отношение равно единице в силу теоремы о квадрате касательной. Значит, $h^2=16$ и $h=4$.

Комментарий. Ответ получен рассмотрением частного случая (например, когда центр окружности лежит на гипотенузе) — баллы не добавляются.

M11.3-6 В магазине продаётся n чашек и n блюдец (все $2n$ товаров различны), причем $n\geq 2025$. Число способов выбрать 6 чашек и 7 блюдец — полный квадрат. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ. 2029.

Решение. Указанное число способов равно $C_n^6\cdot C_n^7=(C_n^6)^2\cdot\dfrac{n-6}{7}$, откуда $n-6$ должно иметь вид $7t^2$ для некоторого натурального t. Поскольку $n\geq 2025$, число $t=\dfrac{n-6}{7}$ есть квадрат натурального числа, большего 16. Прямой проверкой убеждаемся, что $n=7\cdot 17^2+6=2029$ подходит.

Комментарий. Записано число способов выбрать данные объекты (через числа способов или через факториалы) — 1 балл за задачу.
Комбинаторная ошибка (двойной подсчёт, не все баллы учтены и т. п.) — 0 баллов за задачу.